

Concurs de admitere la Facultatea de Matematică și Informatică
Proba: INFORMATICĂ

1. (10p) O matrice pătratică se consideră matrice de tip X dacă toate elementele sale sunt nule cu excepția celor care se află pe una dintre cele două diagonale.

- (a) (5p) Pentru o matrice pătratică A de dimensiune n ($n \leq 10$) se consideră următorul algoritm al cărui scop este să verifice dacă A este matrice de tip X :

```
corect<-1
pentru i<-1,n executa
    pentru j<-1,n executa
        daca <... conditie referitoare la A, i si j ... > atunci corect<-0
```

Completați condiția ($\langle \dots \text{conditie referitoare la } A, i \text{ si } j \dots \rangle$) din pseudocod astfel încât variabila `corect` să aibă valoarea 1 dacă matricea este de tip X și valoarea 0 altfel.

- (b) (5p) Scrieți o funcție C/C++/Pascal care implementează algoritmul de la punctul (a) și returnează valoarea variabilei `corect`.

2. (10p) Se consideră următoarea relație de recurență (pentru n și k numere naturale):

$$f(n, k) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < k \text{ sau } n = 0 \\ 1 & \text{dacă } n > 0 \text{ și } (n = k \text{ sau } k = 0) \\ f(n-1, k) + f(n-1, k-1) & \text{dacă } n > 0 \text{ și } k < n \end{cases}$$

- (a) (2p) Ce valoare are $f(4, 2)$?

- (b) (3p) Ce calcul descrie relația de recurență (pentru $1 \leq k \leq n$)? Alegeți răspunsul corect dintre:

(i) $\sum_{i=k}^{n-1} i + \sum_{i=k-1}^{n-1} i$; (ii) C_n^k ; (iii) $2 \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{k-1} i + \sum_{i=1}^k i$; (iv) A_n^k

- (c) (5p) Scrieți o funcție recursivă în C/C++/Pascal care implementează relația de recurență (primește parametrii n și k și returnează valoarea lui $f(n, k)$).

3. (35p) Se consideră o secvență cu k ($k \leq 1000$) numere naturale stocată într-un tablou unidimensional S .

- (a) (10p) Scrieți o funcție C/C++/Pascal care primește ca parametri pe k și S și efectuează următoarele prelucrări:
(i) completează o variabilă globală L (tablou unidimensional) care conține numărul de elemente din fiecare subsecvență cu valori de aceeași paritate; (ii) returnează numărul, N , de subsecvențe identificate. Exemplu: pentru secvența (5, 1, 3, 2, 4, 7, 6, 4, 10, 8, 3) tabloul L va conține valorile (3, 2, 1, 4, 1) iar funcția va returna 5.

- (b) (10p) Scrieți un subprogram C/C++/Pascal care primește ca parametri indicii, $i1$ și $i2$ (se presupune că $i1 \leq i2$), a două elemente din S și ordonează crescător subtabloul din tabloul S (considerat variabilă globală) determinat de cei doi indici. De exemplu, în cazul în care indicii pornesc de la 0, pentru secvența (5, 1, 3, 2, 4, 7, 6, 4, 10, 8, 3) și $i1=6$, $i2=9$ după ordonare variabila S va conține (5, 1, 3, 2, 4, 7, 4, 6, 8, 10, 3).

- (c) (10p) Folosind rezultatele obținute apelând funcția de la punctul (a) și apelând subprogramul de la punctul (b) să se transforme tabloul S astfel încât toate subsecvențele de numere de aceeași paritate să fie ordonate crescător. Secvența (5, 1, 3, 2, 4, 7, 6, 4, 10, 8, 3) se va transforma în (1, 3, 5, 2, 4, 7, 4, 6, 8, 10, 3).

- (d) (5p) Ana și Maria joacă următorul joc: fiind dată o secvență de numere naturale fiecare jucător trebuie să elimine subsecvența de numere de aceeași paritate de la începutul secvenței curente. Pentru secvența (5, 1, 3, 2, 4, 7, 6, 4, 10, 8, 3), după mutarea primului jucător secvența devine (2, 4, 7, 6, 4, 10, 8, 3), după mutarea celui de al doilea devine (7, 6, 4, 10, 8, 3) etc. Jucătorul care elimină ultima subsecvență pierde jocul. Ambele jucătoare au acces la întreaga secvență. Ana are dreptul să decidă dacă vrea să înceapă jocul sau dacă o lasă pe Maria să înceapă. Ce informații despre secvență sunt suficiente pentru Ana pentru a putea lua decizia care garantează că va câștiga? Descrieți, în limbaj natural, regula de decizie corespunzătoare.

4. (35p) Un careu Sudoku este un tablou bidimensional cu 9 linii și 9 coloane ce conține cifre cuprinse între 1 și 9. Careul este considerat corect completat dacă satisface următoarele proprietăți (vezi exemplul de mai jos): (i) fiecare linie și fiecare coloană conține cifre distincte; (ii) fiecare dintre cele 9 subtablouri cu 3 linii și 3 coloane (care acoperă în mod disjunct tabloul de 9×9) conține cifre distincte.
- (a) (10p) Scrieți o funcție C/C++/Pascal care primește ca parametru un tablou unidimensional cu 9 elemente și verifică dacă elementele sunt cifre distincte (se presupune ca elementele sunt numere naturale între 1 și 9). Funcția va returna valoarea 1 dacă tabloul satisface proprietatea cerută și 0 în caz contrar.
- (b) (2p) Declarați o variabilă cu numele **S** în care să poată fi stocat tabloul bidimensional cu 9 linii și 9 coloane.
- (c) (5p) Scrieți o funcție C/C++/Pascal care primește ca parametru indicii corespunzători celulei din stânga sus, respectiv ale celulei din dreapta jos a unui subtablou de 3×3 elemente din tabloul **S** și verifică dacă elementele subtabloului specificat sunt cifre distincte (se presupune că elementele sunt numere naturale între 1 și 9). Funcția va returna valoarea 1 dacă subtabloul specificat satisface proprietatea cerută și 0 în caz contrar. Este permisă utilizarea funcției de la punctul (a).
- (d) (15p) Scrieți un subprogram C/C++/Pascal care folosește funcțiile definite la (a) și (c) și care verifică dacă tabloul stocat în variabila globală **S** corespunde unui careu Sudoku completat corect. Subprogramul va afișa "Careu corect" dacă sunt satisfăcute proprietățile respectiv "Careu incorect" dacă nu sunt satisfăcute.
- (e) (3p) Presupunând că într-un subtablou 3×3 sunt completate k elemente ($1 \leq k < 9$) cu valori specificate, care este numărul de subtablouri distincte (care satisfac condiția de la Sudoku) ce pot fi obținute prin completarea celor $9 - k$ elemente? Alegeți răspunsul corect dintre: (i) A_9^k ; (ii) A_9^{9-k} ; (iii) C_9^k ; (iv) C_9^{9-k} ; (v) $k!$; (vi) $(9 - k)!$.

Exemplu de careu completat corect:

6	8	2	1	9	4	3	5	7
7	3	1	5	6	8	9	2	4
4	9	5	7	2	3	8	6	1
8	2	7	9	3	5	1	4	6
5	1	9	6	4	7	2	8	3
3	6	4	2	8	1	5	7	9
9	5	6	4	1	2	7	3	8
2	4	8	3	7	9	6	1	5
1	7	3	8	5	6	4	9	2

[Sursa: <http://www.rasfoiesc.com/familie/copii/Ghid-Sudoku-Regulile-jocului69.php>]

Notă:

1. Timp de lucru: 3 ore
2. Toate subiectele sunt obligatorii
3. Limbajul de programare este la alegere între C/C++ și Pascal
4. Pentru fiecare dintre funcțiile/subprogramele scrise se vor specifica toate declarațiile de variabile globale și locale necesare și se vor pune comentarii explicative. NU este necesară scrierea programului principal și preluarea datelor prin citire.

Barem de corectare - INFORMATICĂ

Start	10p
1	10p
1a: 5p (Condiția: $((i = j \text{ sau } i + j = n + 1) \text{ și } A_{ij} = 0) \text{ sau } (i \neq j \text{ și } i + j \neq n + 1 \text{ și } A_{ij} \neq 0)$)	
1b: 5p (declararea corectă a funcției, a variabilelor locale și returnarea rezultatului - 1p; descrierea corectă a parcurgerii matricii - 2p; specificarea corectă a condiției și completarea variabilei corect - 1p)	
2	10p
2a: 2p Răspuns corect: 6	
2b: 3p Răspuns corect: (ii)	
2c: 5p (declararea corectă a funcției, a variabilelor locale și returnarea rezultatului - 1p; implementarea corectă a relației de recurență - 4p)	
3	35p
3a: 10p (declararea corectă a funcției și a variabilelor locale - 2p; completarea corectă a tabloului L - 6p; determinarea și returnarea numărului de subsecvențe - 2p)	
3b: 10p (declararea corectă a subprogramului și a variabilelor locale - 1p; implementarea corectă a algoritmului de sortare - 9p)	
3c: 10p (declararea variabilelor utilizate - 1p; parcurgerea tabloului S - 3p; stabilirea indicilor corespunzători și apelul corect a subprogramului de la punctul (b) - 6p)	
3d: 5p Răspuns: este suficient să se cunoască numărul de subsecvențe de valori cu aceeași paritate (valoarea N); regula de decizie: "dacă N este par atunci Ana începe jocul altfel o lasă pe Maria să înceapă".	

4 35p

4a: 10p

Variantă de rezolvare: se construiește un tabel de frecvențe corespunzător valorilor naturale cuprinse între 1 și 9 și se verifică dacă toate elementele tabloului de frecvențe sunt egale cu 1.

(declararea corectă a funcției, a variabilelor locale și returnarea rezultatului- 1p; verificarea condiției că elementele au valori distincte - 9p)

4b: 2p

(declararea corectă a tabloului bidimensional S - 2p)

4c: 5p

Variantă de rezolvare: se construiește un tablou unidimensional conținând elementele subtabloului și se apelează funcția de la punctul (a)

(declararea corectă a funcției, a variabilelor locale și returnarea rezultatului- 1p; parcurgerea corectă a elementelor subtabloului - 2p; verificarea condiției că elementele au valori distincte - 2p)

4d: 15p

(declararea corectă a subprogramului și a variabilelor locale - 1p; verificarea proprietății la nivel de linii - 3p; verificarea proprietății la nivel de coloane - 3p; verificarea proprietății la nivel de subtablouri - 8p)

4e: 3p

Răspuns: (vi) (9-k)!

TOTAL: 100

Observație: Se punctează corespunzător orice variantă corectă de rezolvare.